NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

Travail de groupe n° 5

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2-1.	Exercice 2-2.	Exercice 2-3.	Exercice 2-4.	Tenue du groupe	BONUS
Total	2	3	5	5	4	1	2

Exercice 1
Une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Soit n un entier naturel et $aetb$ des entiers tels que : $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.

Affirmation :
« le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7. »

Exercice 2

1. (a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$
   (b) En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$
   (c) Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs a et k tels que $14a - 26k = 4$
2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

   On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

   Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé, puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

   On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

   (a) Montrer que les entiers a et b sont tels que :
   $$\begin{cases} 5a + b & \equiv & 10 & [26] \\ 19a + b & \equiv & 14 & [26] \end{cases}$$
   (b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$
   (c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$, tels que :
   $$\begin{cases} 5a + b & \equiv & 10 & [26] \\ 19a + b & \equiv & 14 & [26] \end{cases}$$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$
   (a) Coder le message « GAUSS »
   (b) Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n-p) \equiv 0 \quad [26]$.
   En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.
4. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.
   (a) Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.
   (b) En déduire un procédé de décodage.
   (c) En déduire le décodage du message « KTGZDO »

BONUS Démontrer par l'absurde que $\log 2$ est un irrationnel.
Remarque : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$